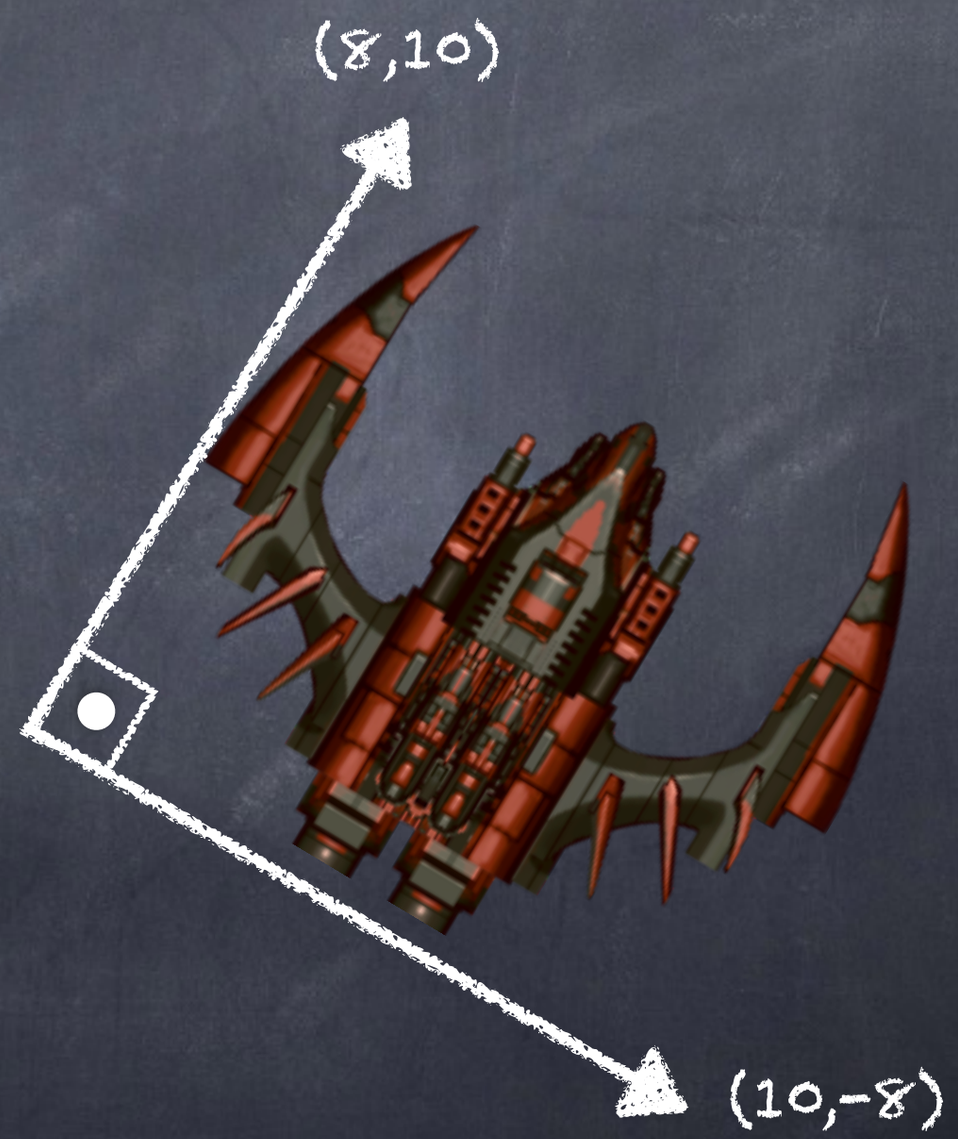
Guia de sobrevivência Matrizes

Global Game Jam - CWB
Ráfagan Abreu (facebook)
rafagansa@outlook.com

O que você encontrará neste guia

- Para quê sevem matrizes e como utilizar;
- Explicação das fórmulas mais comuns;
- Exemplos práticos de jogos;
- Situações mais voltadas para física para jogos.



O que você não encontrará aqui

- Práticas matemáticas avançadas;
- Não vamos nos aprofundar muito na parte 3D;
- Computação gráfica avançada;
- Foco em sistemas de equações lineares.

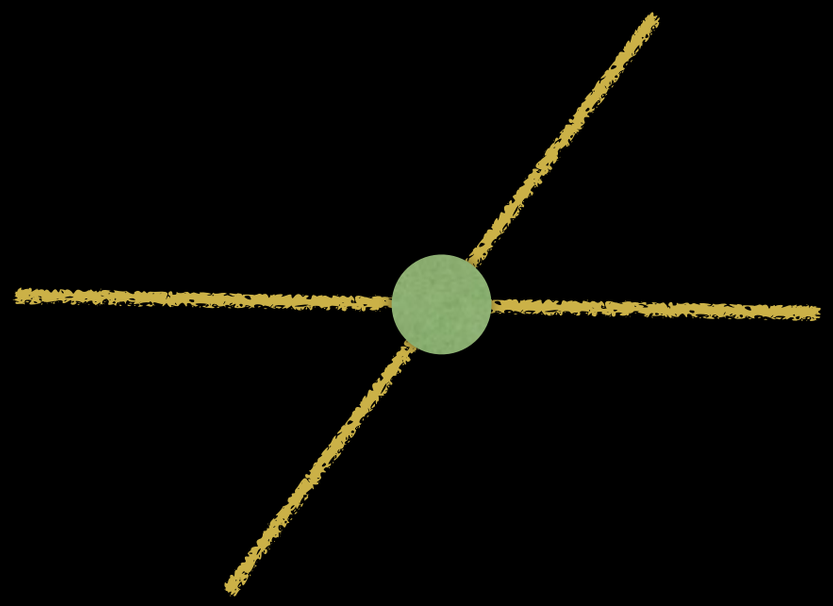
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

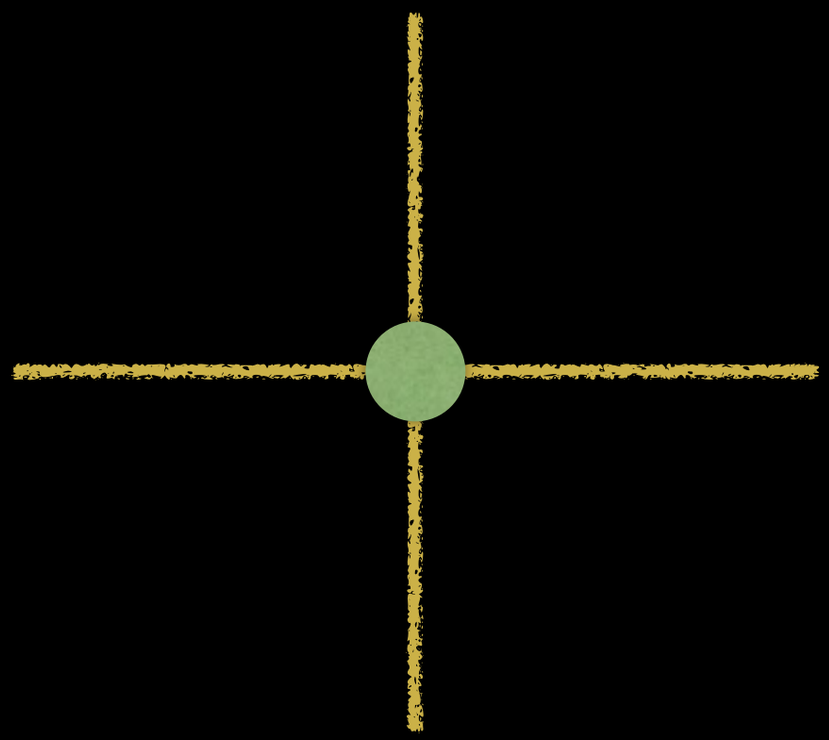
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

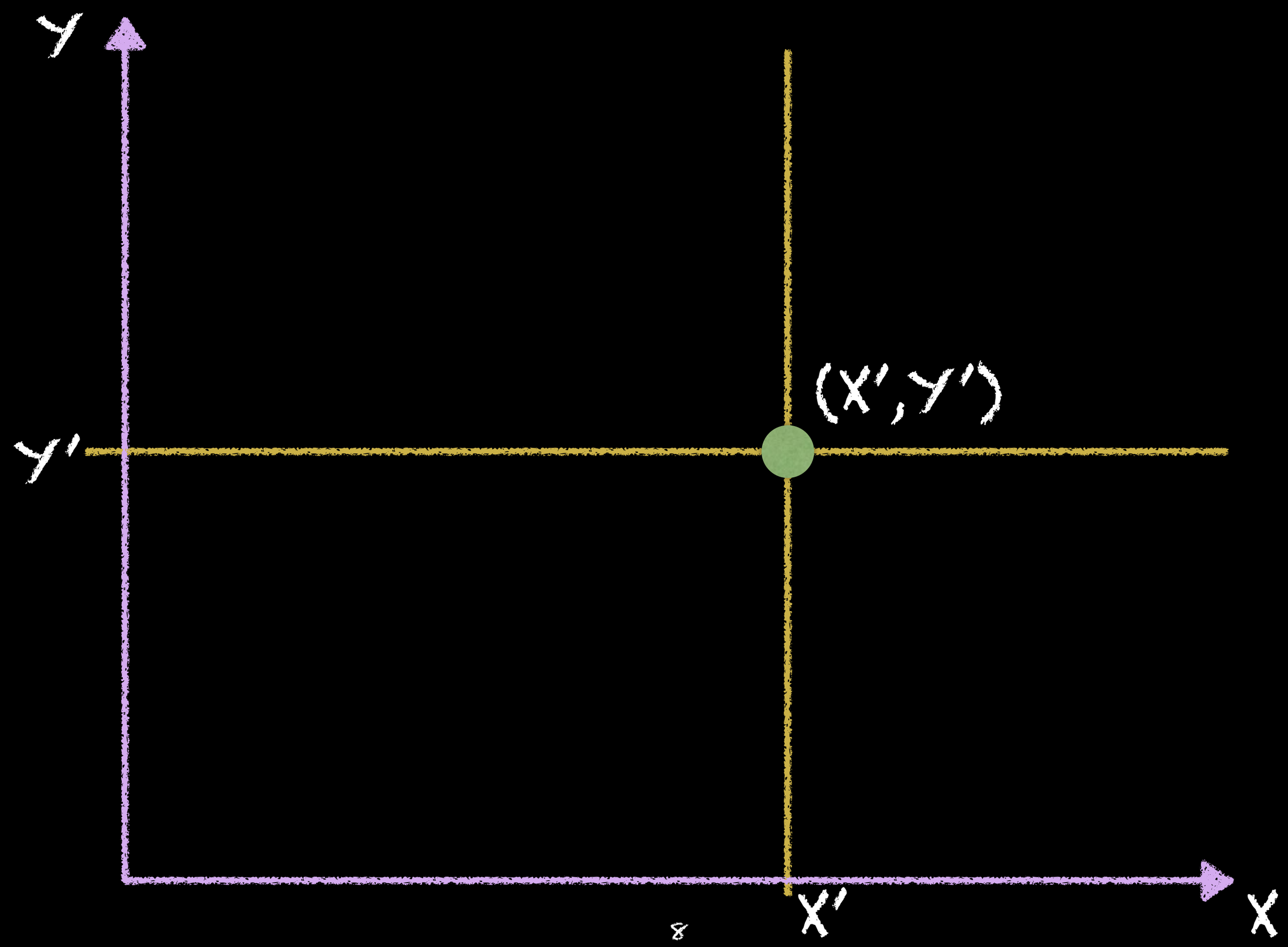
$$[A]\{x\} = \{b\}$$

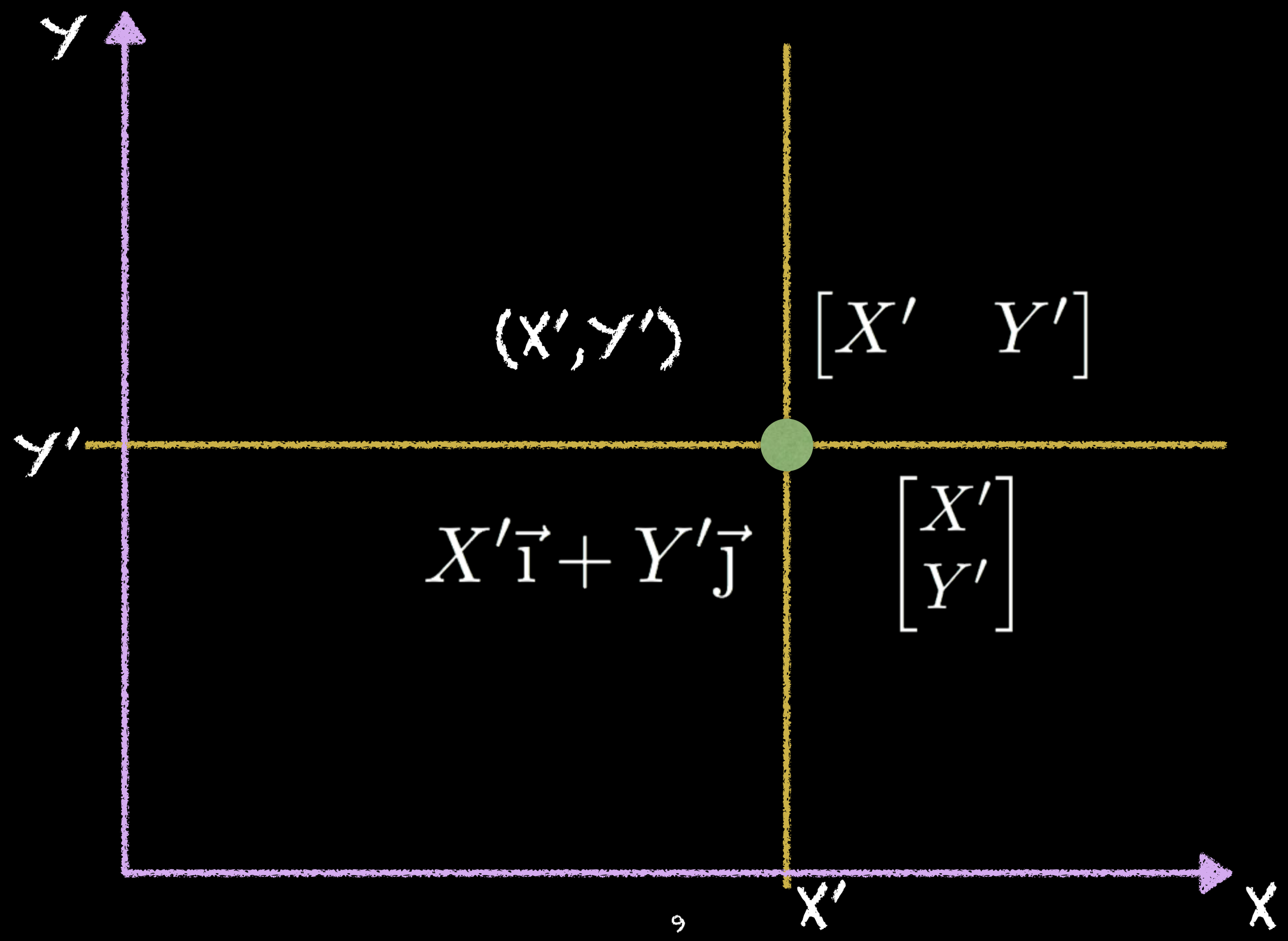
Importante

- Assista ao guia de sobrevivência de vetores da global game jam do ano passado:
  - https://www.youtube.com/watch?v=0ScX3TOibKA
  - https://www.youtube.com/watch?v=V3jwGZhAzMY

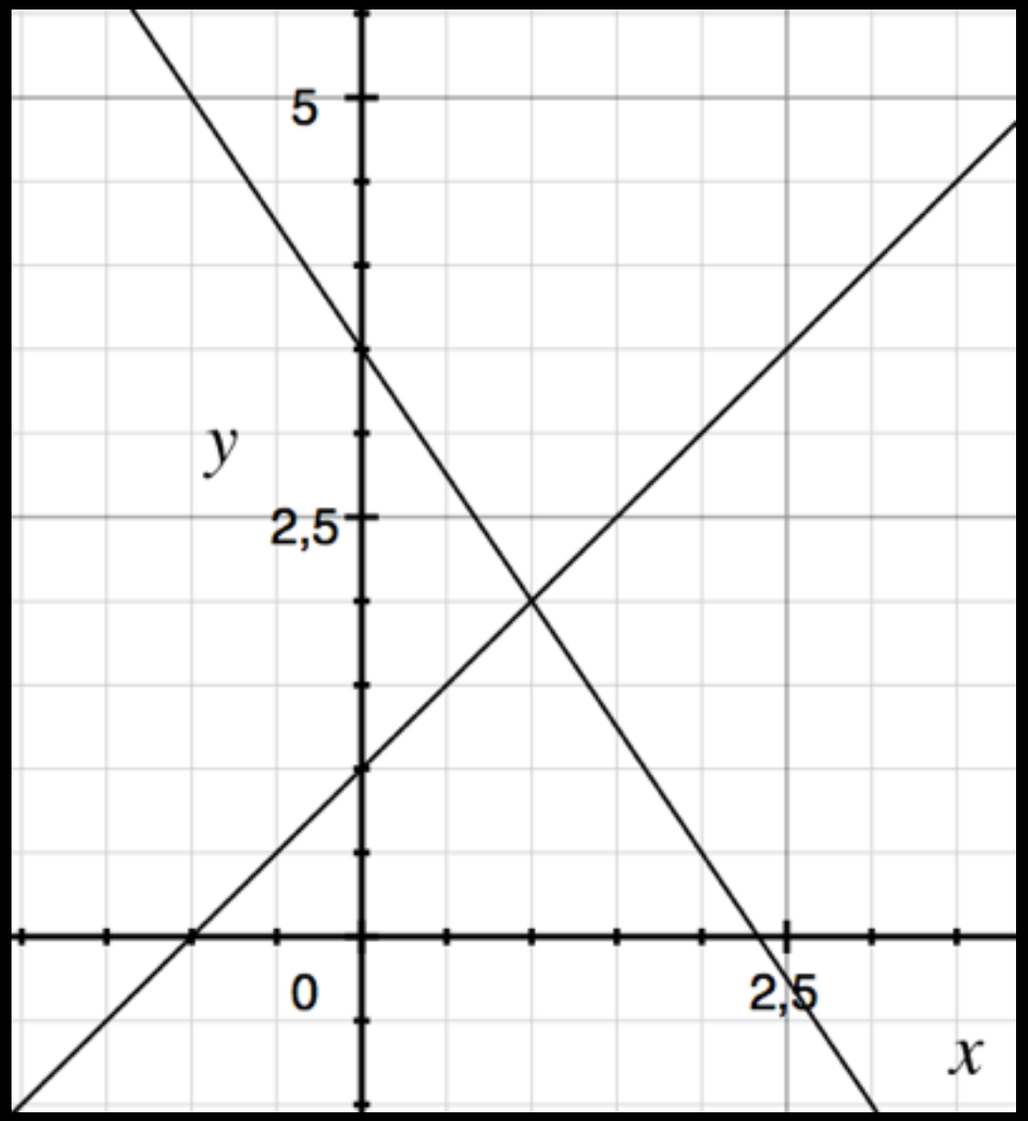





y
y'
(x', y')
x'
x


y
y'
(X',Y')
$[X' \quad Y']$
$X'\vec{\imath} + Y'\vec{\jmath}$
$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}$
X'
X

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -6x + 6y = 6 \end{cases}$$



Álgebra Linear

Sistemas de equações lineares (<< 0)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -6x + 6y = 6 \end{cases}$$

Teoria dos Determinantes (XVII - XVIII)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

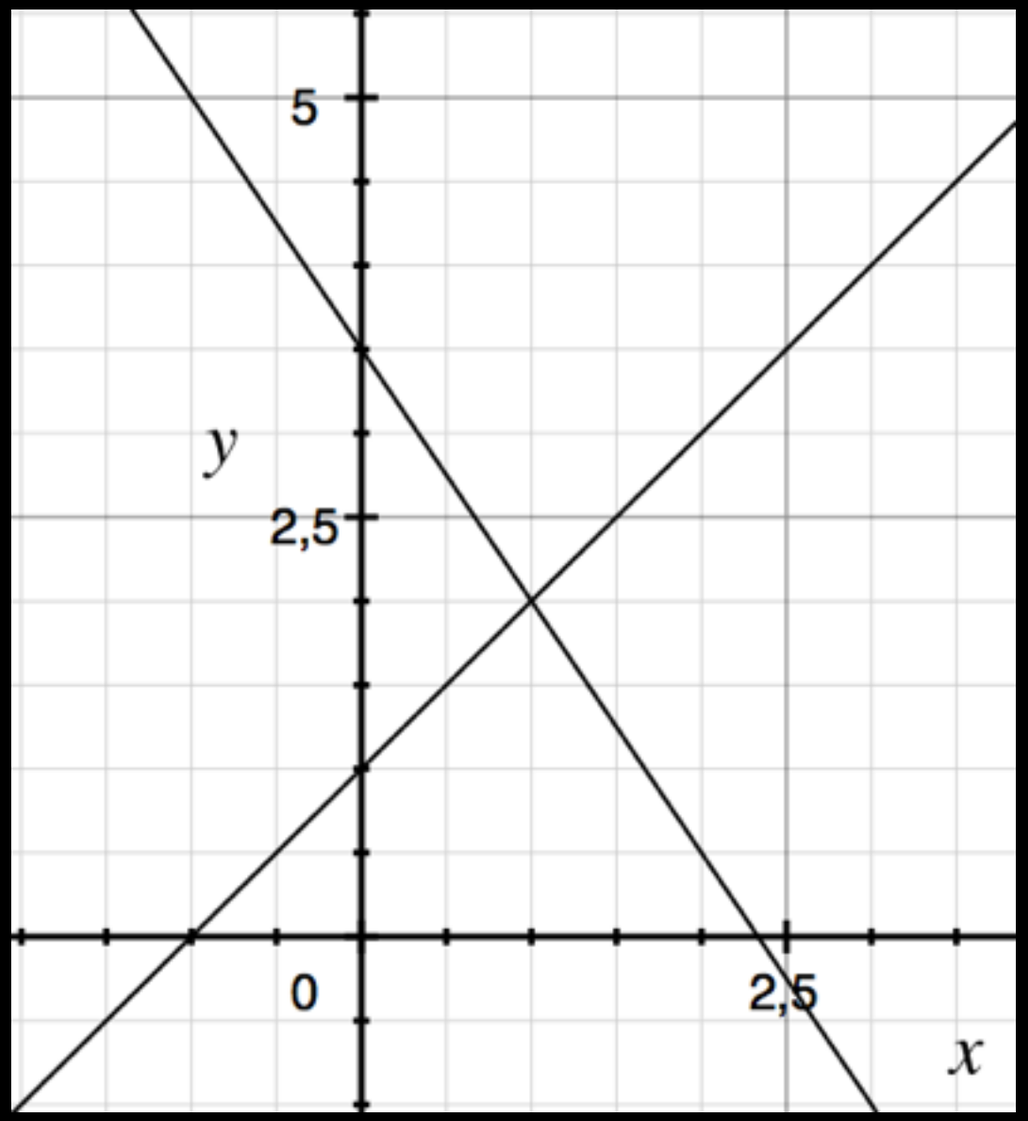
$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Matrizes (XIX)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -6x + 6y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

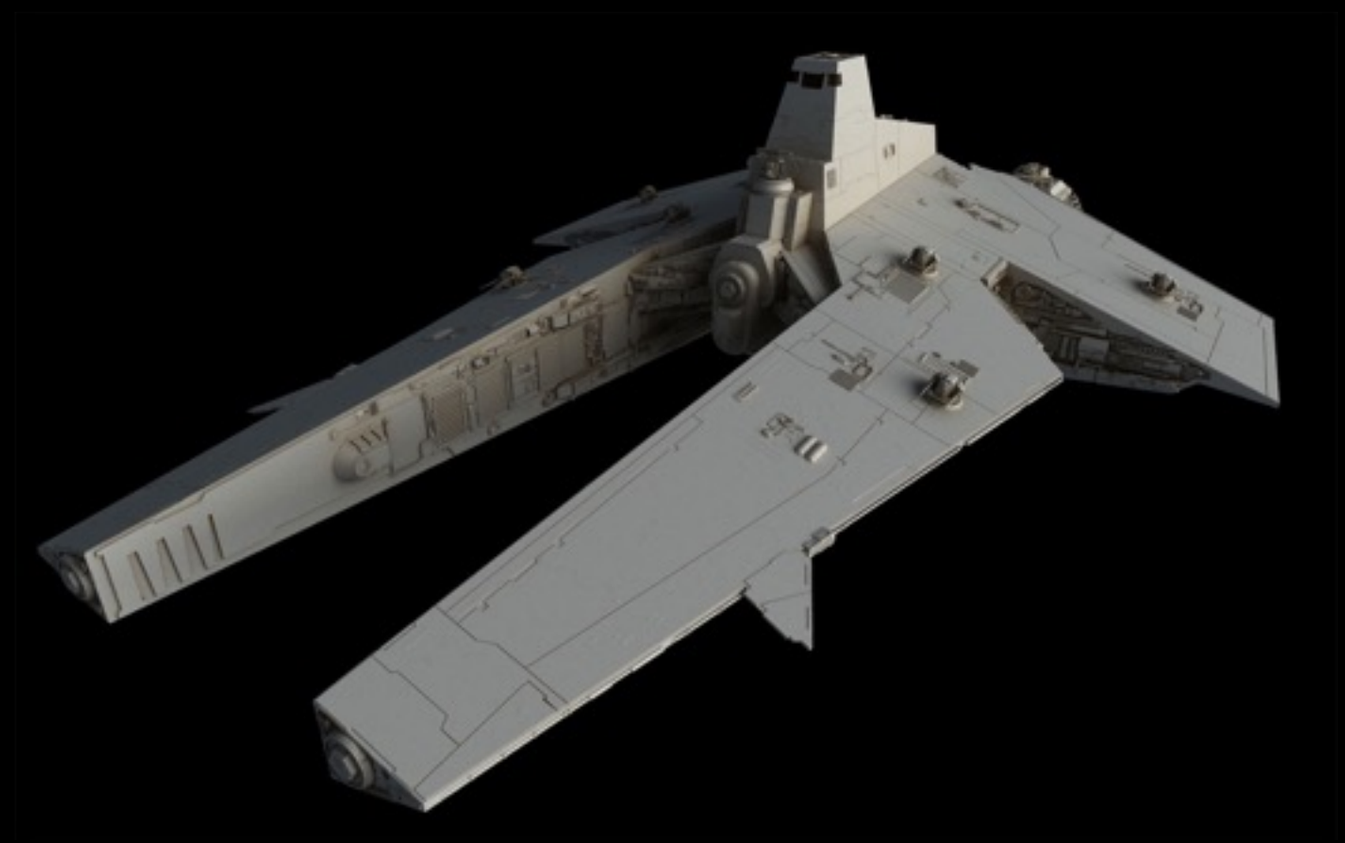
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}}$$



O objetivo deste guia é fazê-lo entender como utilizar a equação matricial abaixo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

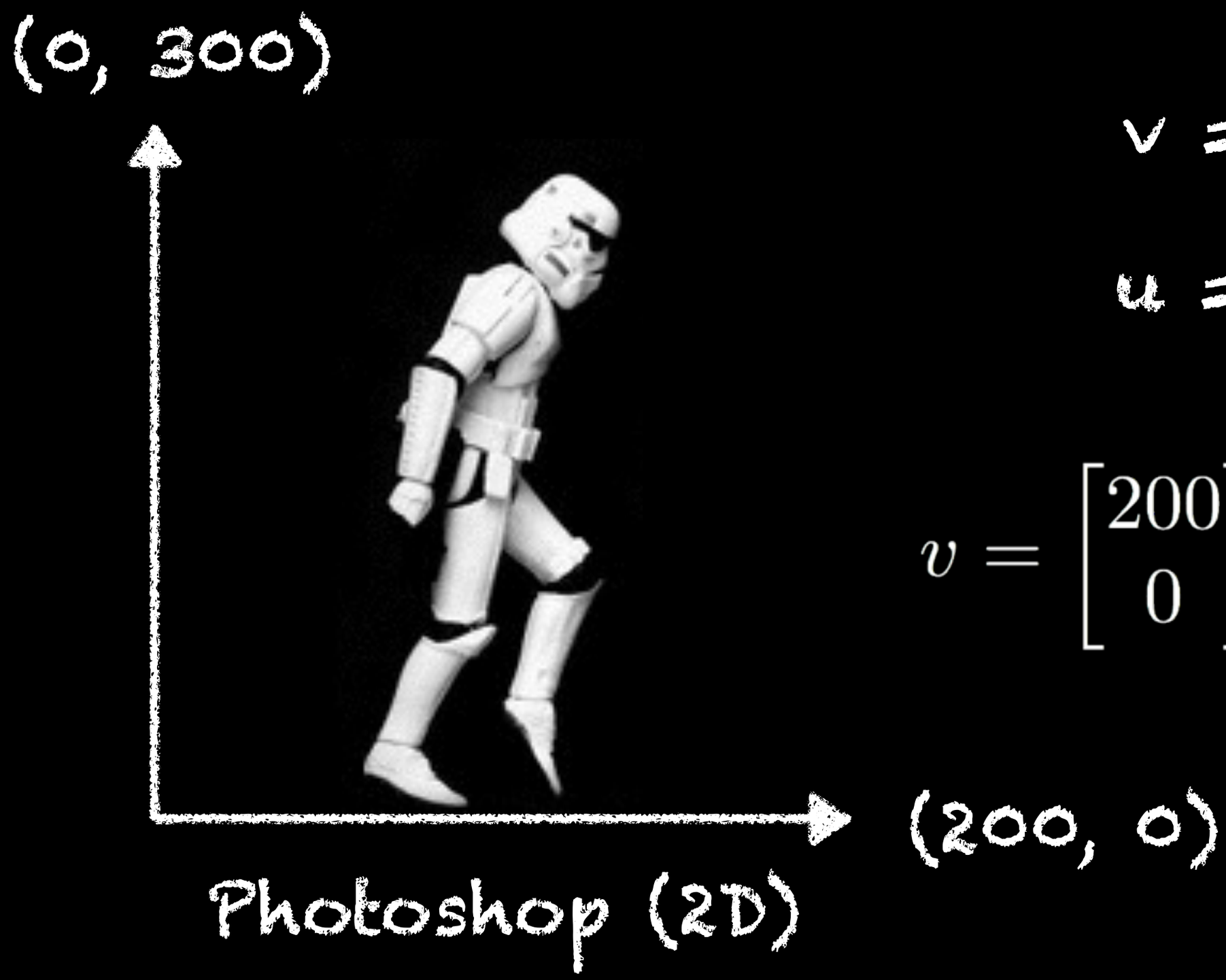
Seus personagens



Photoshop (2D)

Maya (3D)

Entendendo as proporções

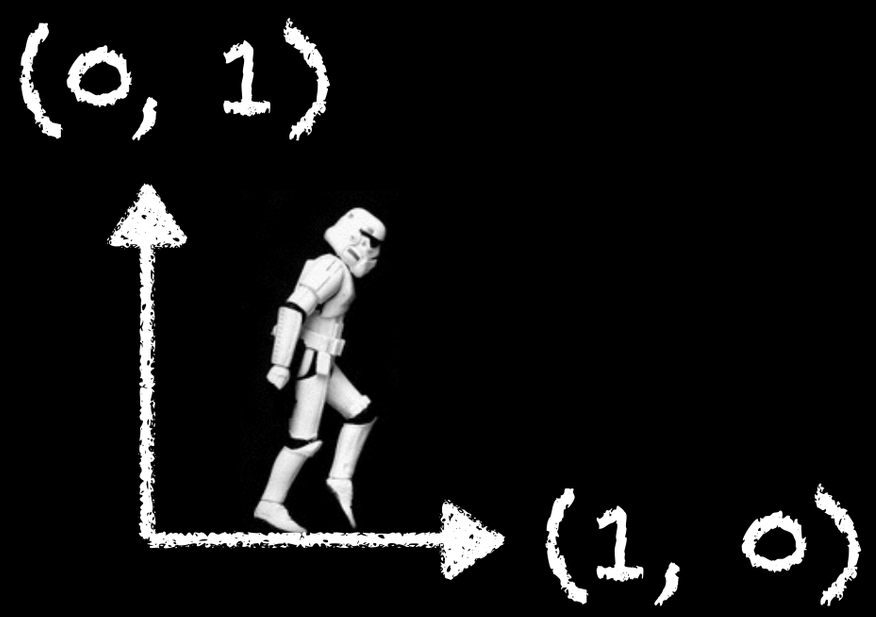


$v = (200, 0)$

$u = (0, 300)$

$$v = \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ 300 \end{bmatrix}$$

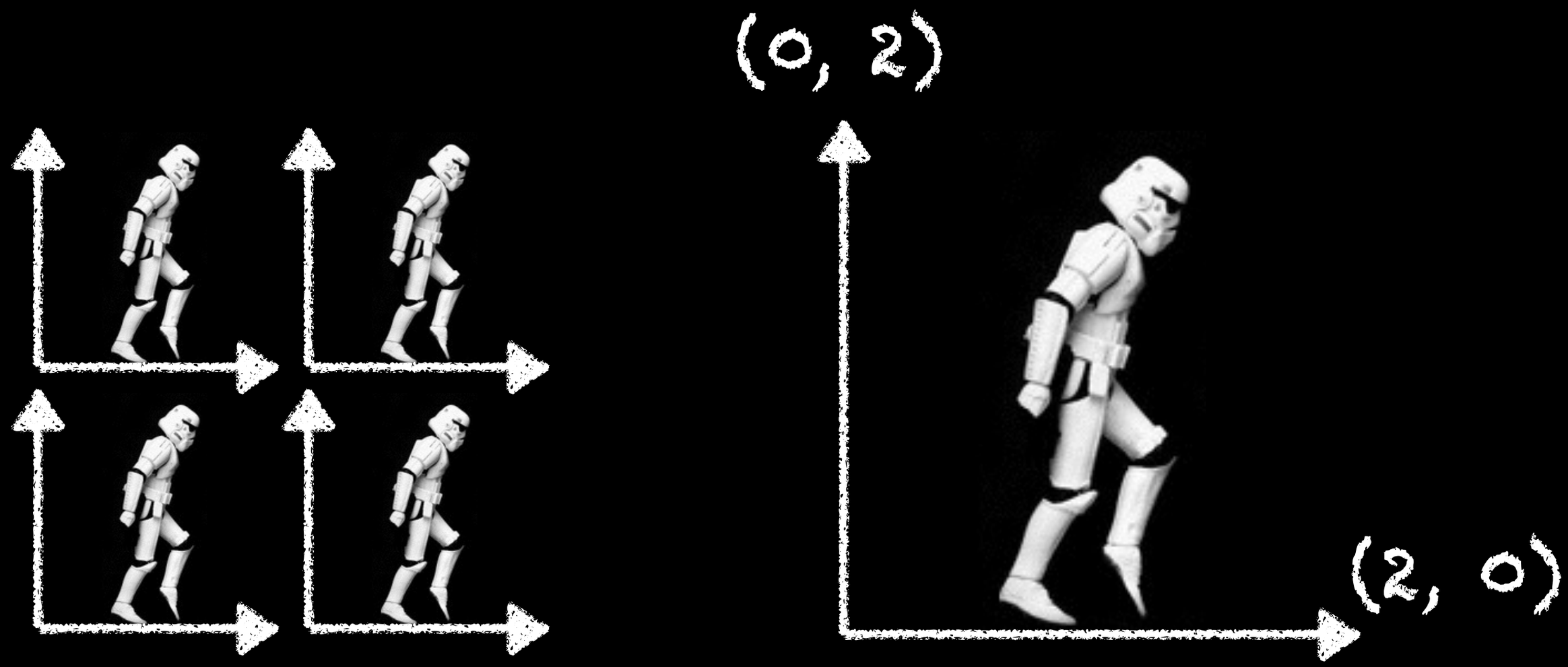
Entendendo as proporções



- Com proporção 1:1, o personagem possui altura e largura de 200x300.

$$v + u = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix} = s$$

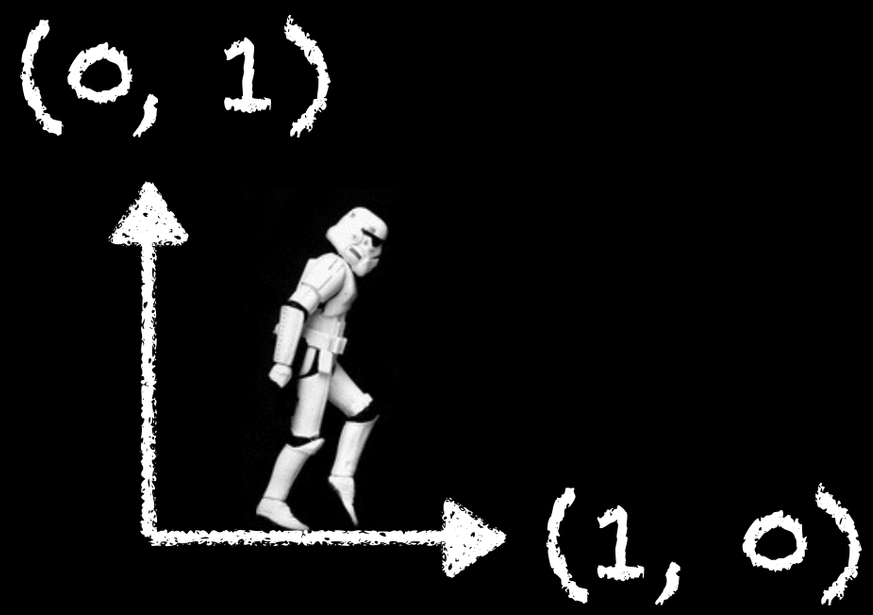
Entendendo as proporções

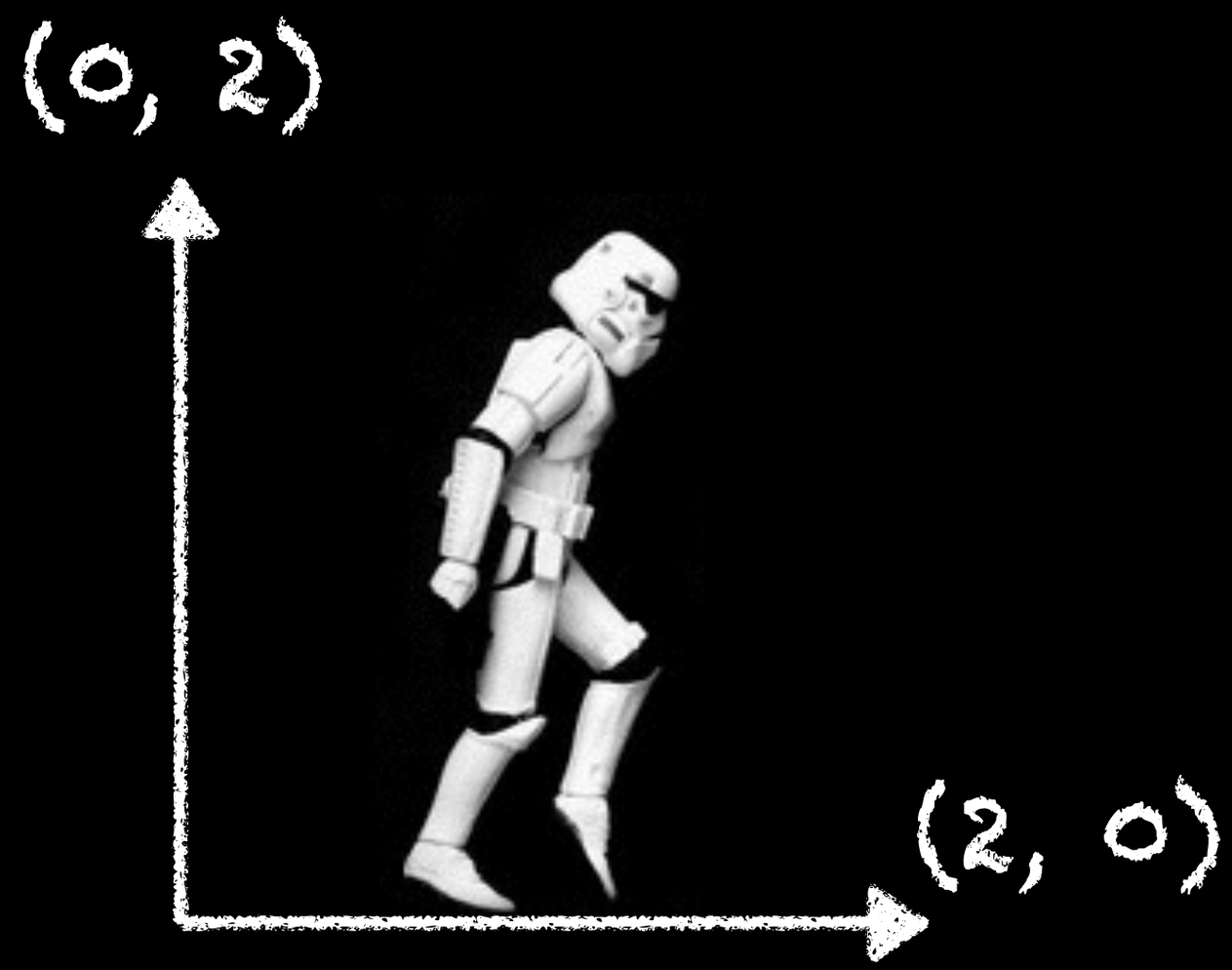


- Com proporção 2:2, o personagem possui altura e largura de 400x600.

$$2s = 2\begin{bmatrix}200\\300\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 200\\2\cdot 300\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}400\\600\end{bmatrix}$$

Sistema de Coordenadas = Matriz





Matriz identidade

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares

- São operações realizadas sobre um sistema de coordenadas;
- Podemos chegar a qualquer sistema de coordenadas existente utilizando 3 transformações básicas: **Translação, Rotação e Escala**;
- A **matriz identidade** representa um sistema de coordenadas sem transformação alguma:
  - É, basicamente, o personagem como ele foi exportado do photoshop ou maya.

Multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} \circ b_{11} + a_{12} \circ b_{21}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

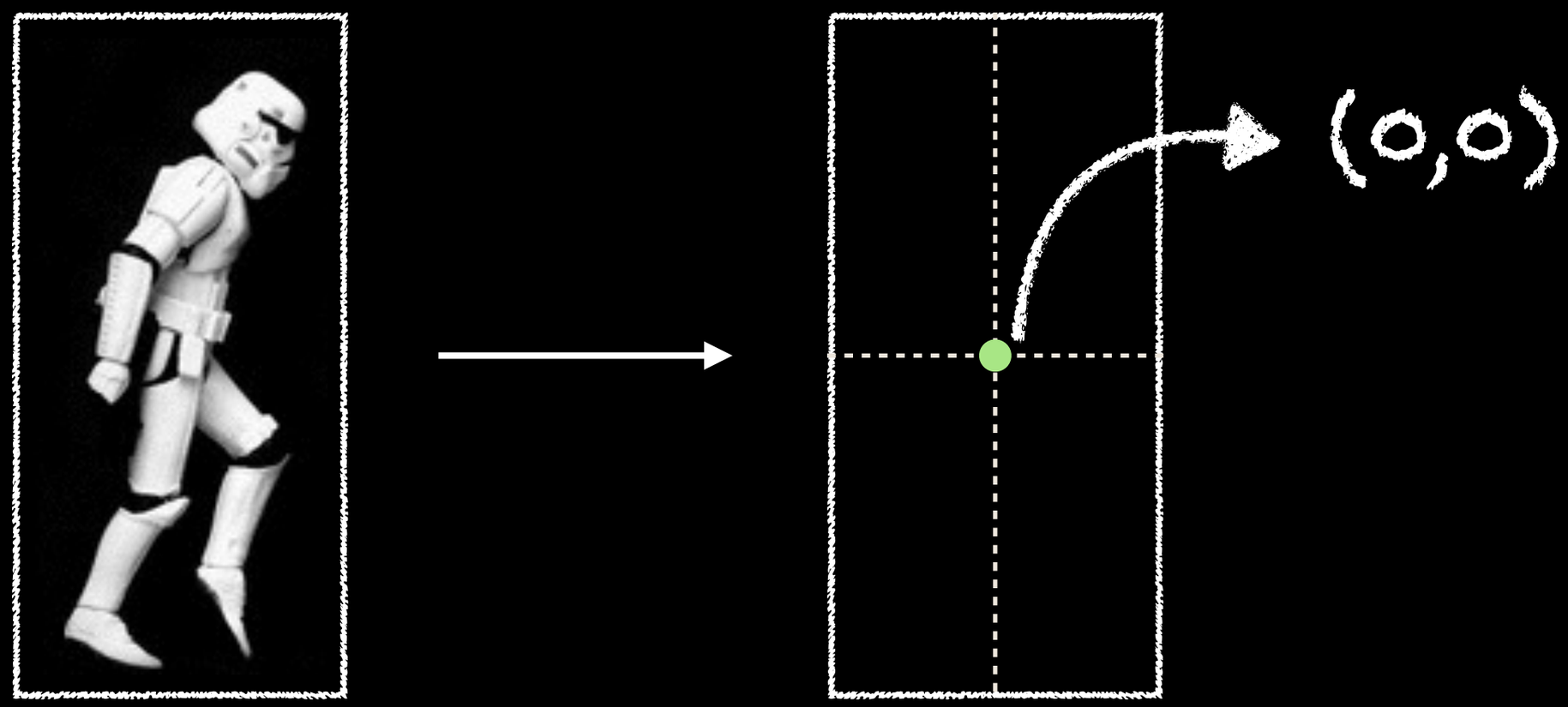
Escala

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x \cdot x \\ S_y \cdot y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

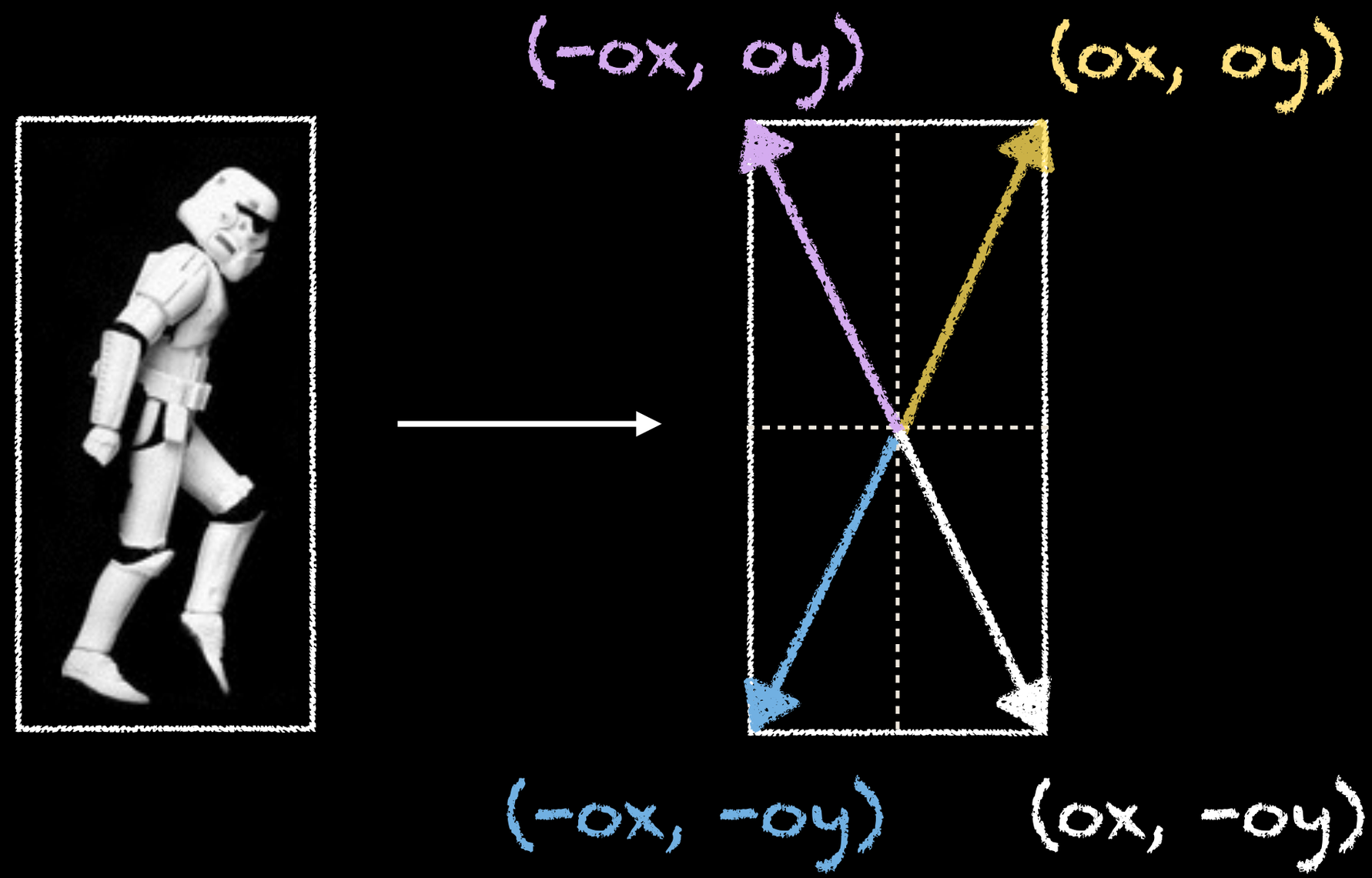
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \end{bmatrix}$$

Como aplicar transformações



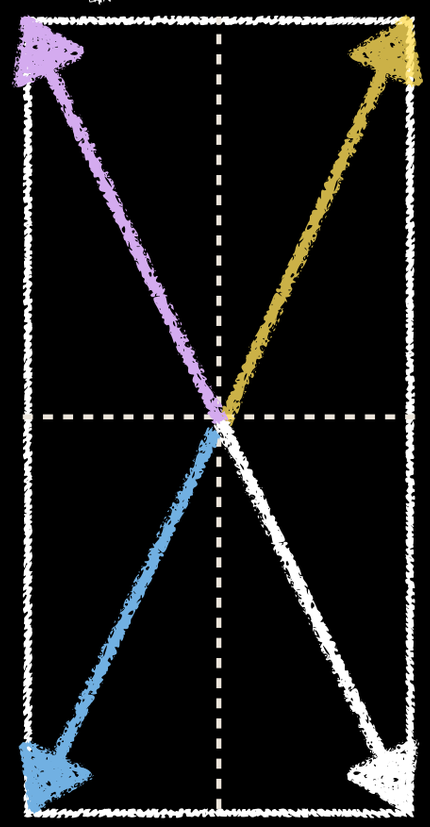
$$(200, 300) \div 2 = (100, 150) = (ox, oy)$$

Como aplicar transformações



Como aplicar transformações

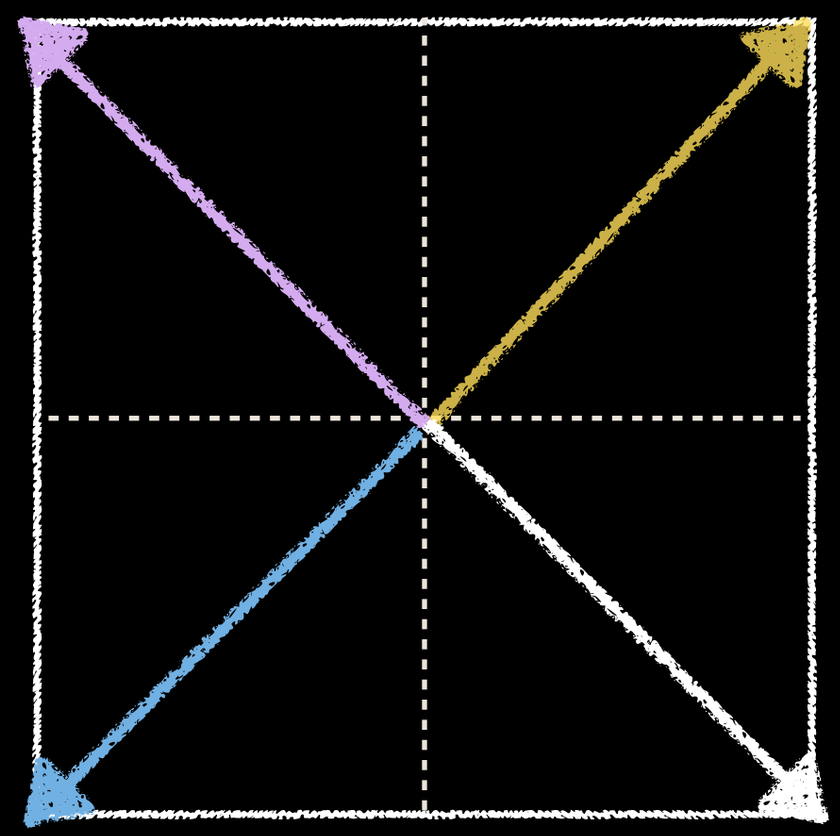
(-ox, oy) (ox, oy)



(-ox, -oy) (ox, -oy)

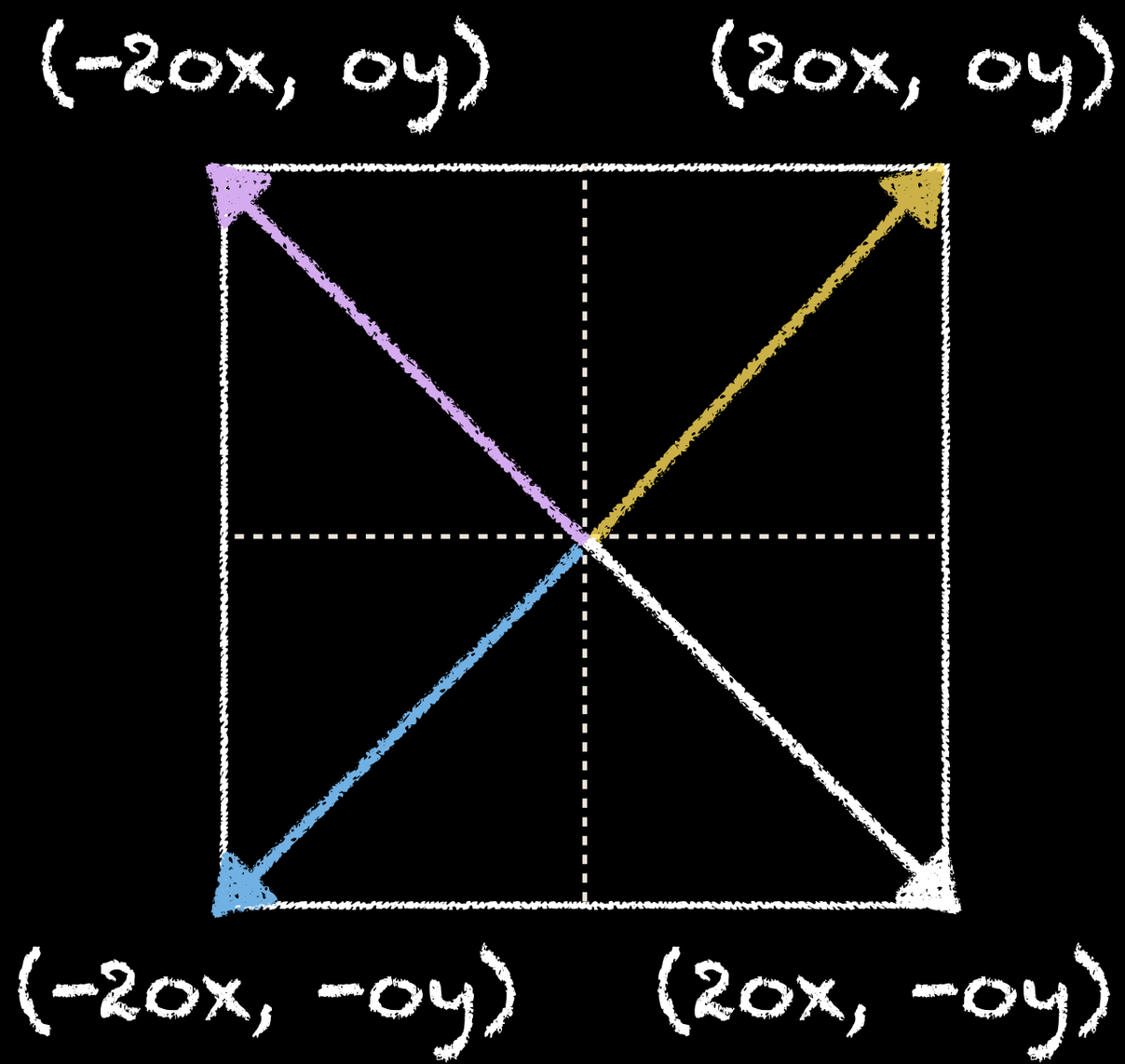
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(-2ox, oy) (2ox, oy)



(-2ox, -oy) (2ox, -oy)

Como aplicar transformações



ex:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2o_x \\ o_y \end{bmatrix}$$

Como aplicar transformações

?

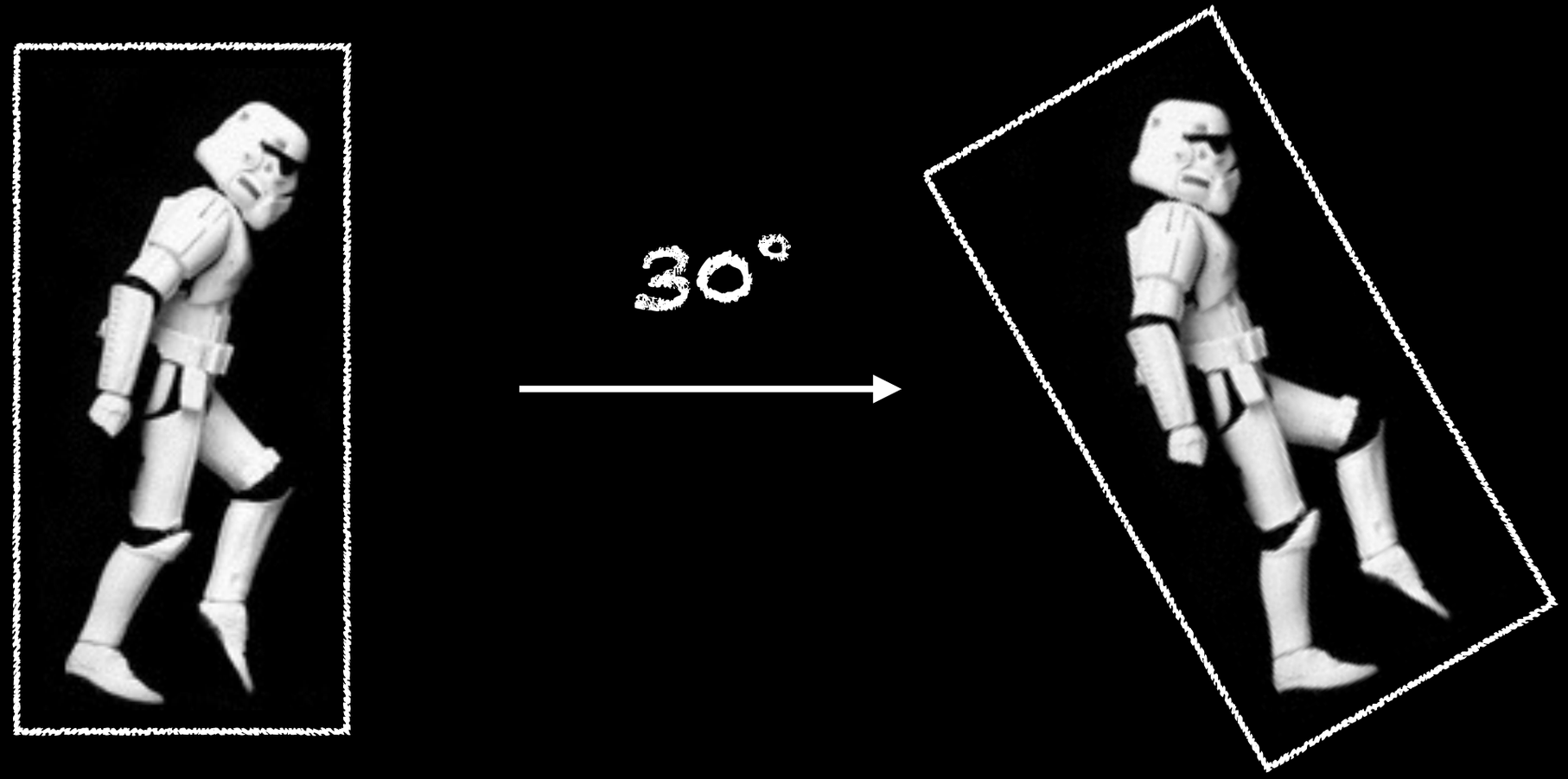
Como aplicar transformações

A regra é a mesma: Para todo vértice do personagem, multiplique-o pela matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix}$$

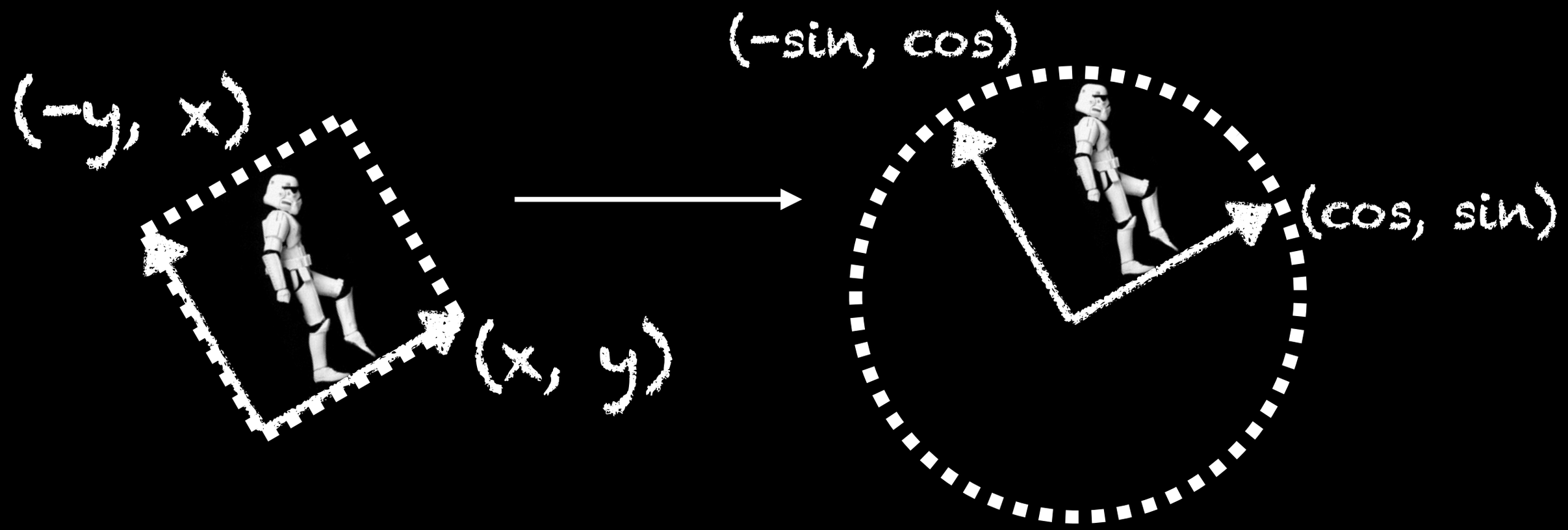
Rotação

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot o_x - \sin\theta \cdot o_y \\ \sin\theta \cdot o_x + \cos\theta \cdot o_y \end{bmatrix}$$

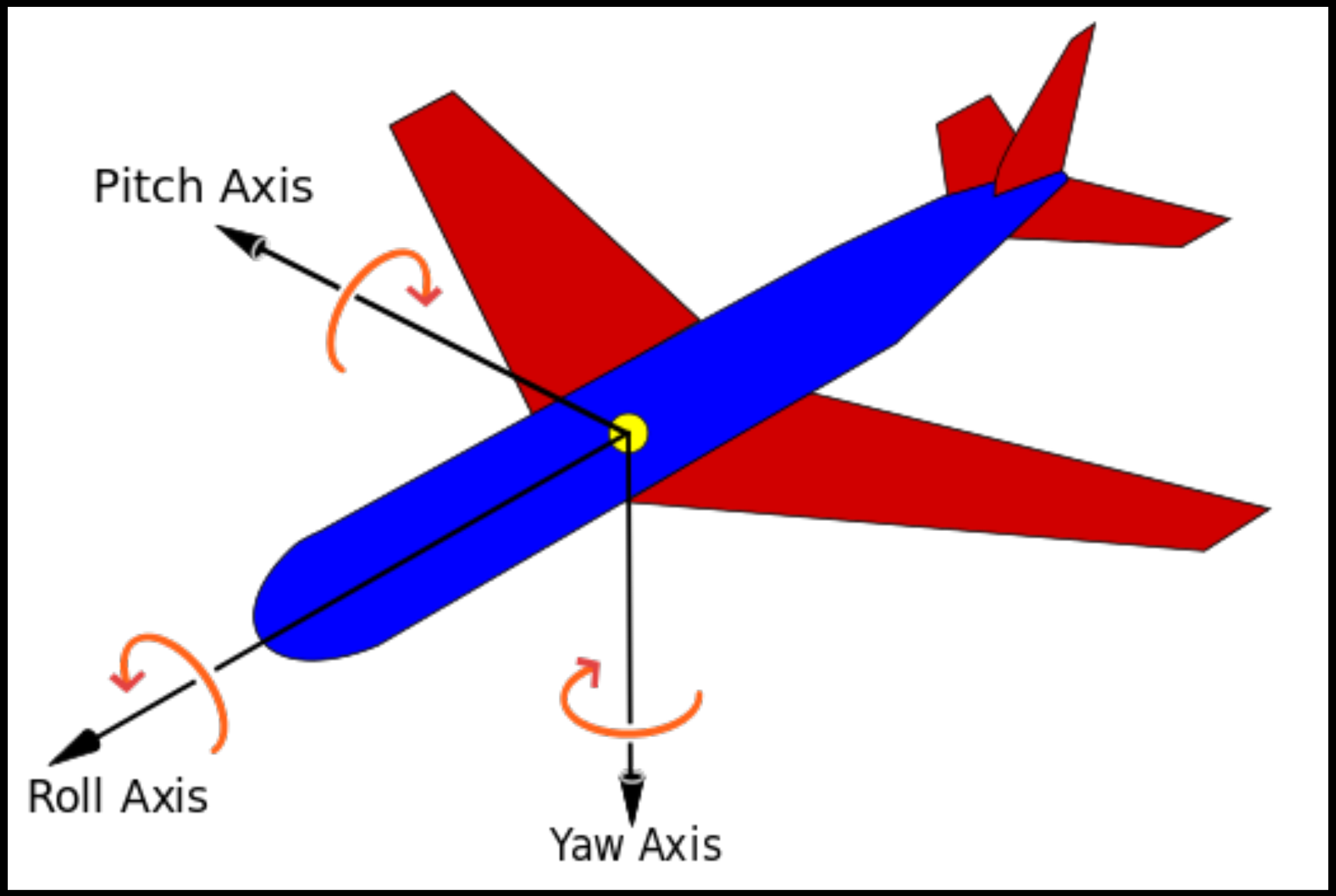


Rotação

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot o_x - \sin\theta \cdot o_y \\ \sin\theta \cdot o_x + \cos\theta \cdot o_y \end{bmatrix}$$



Rotação no 3D
Euler Angles



Euler Angles

Multiplicando-se o vetor por essas matrizes, é possível chegar a qualquer orientação no espaço tridimensional

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Euler Angles

Proper Euler angles (z-x-z, x-y-x, y-z-y, z-y-z, x-z-x, y-x-y)

Tait-Bryan angles (x-y-z, y-z-x, z-x-y, x-z-y, z-y-x, y-x-z).

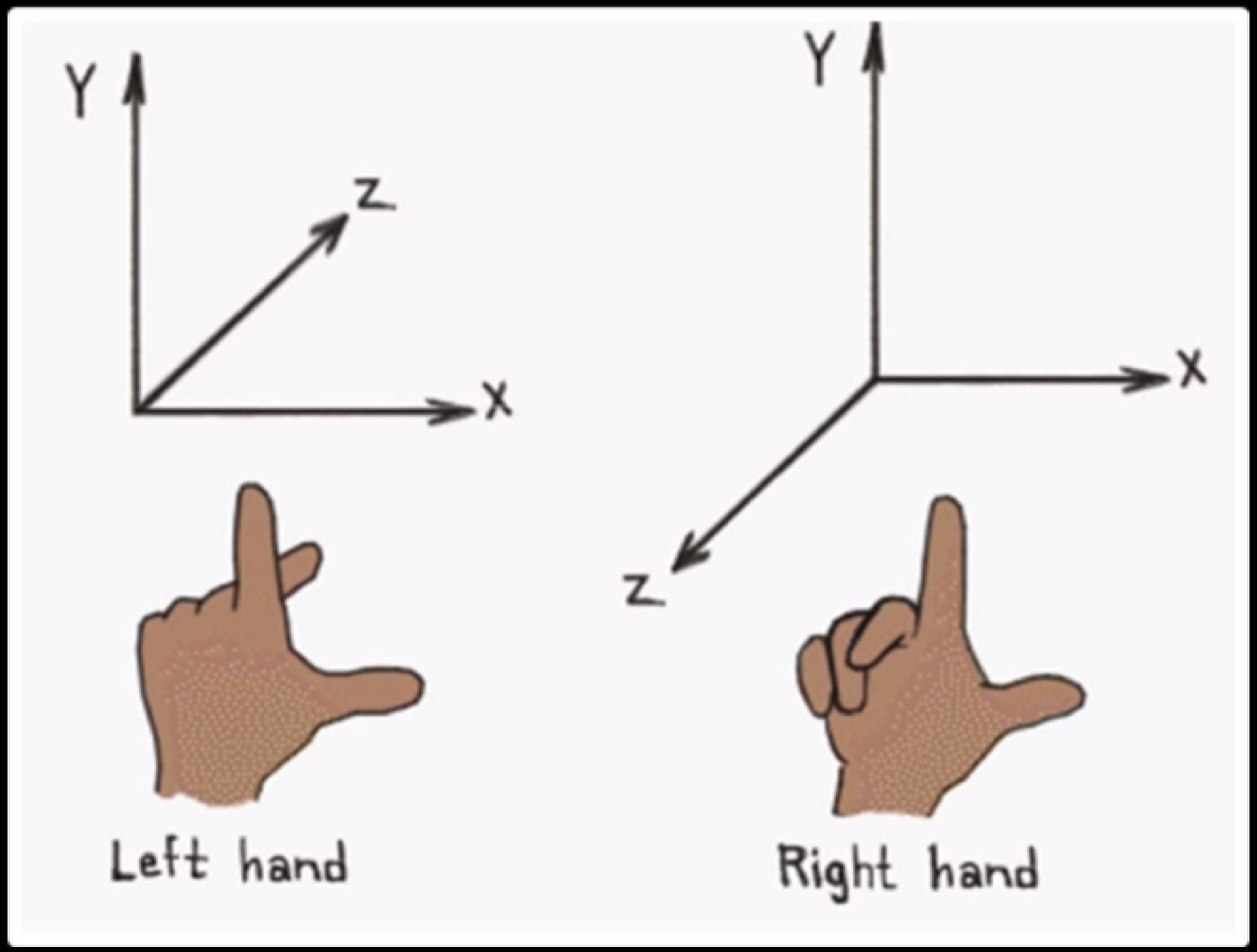
$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

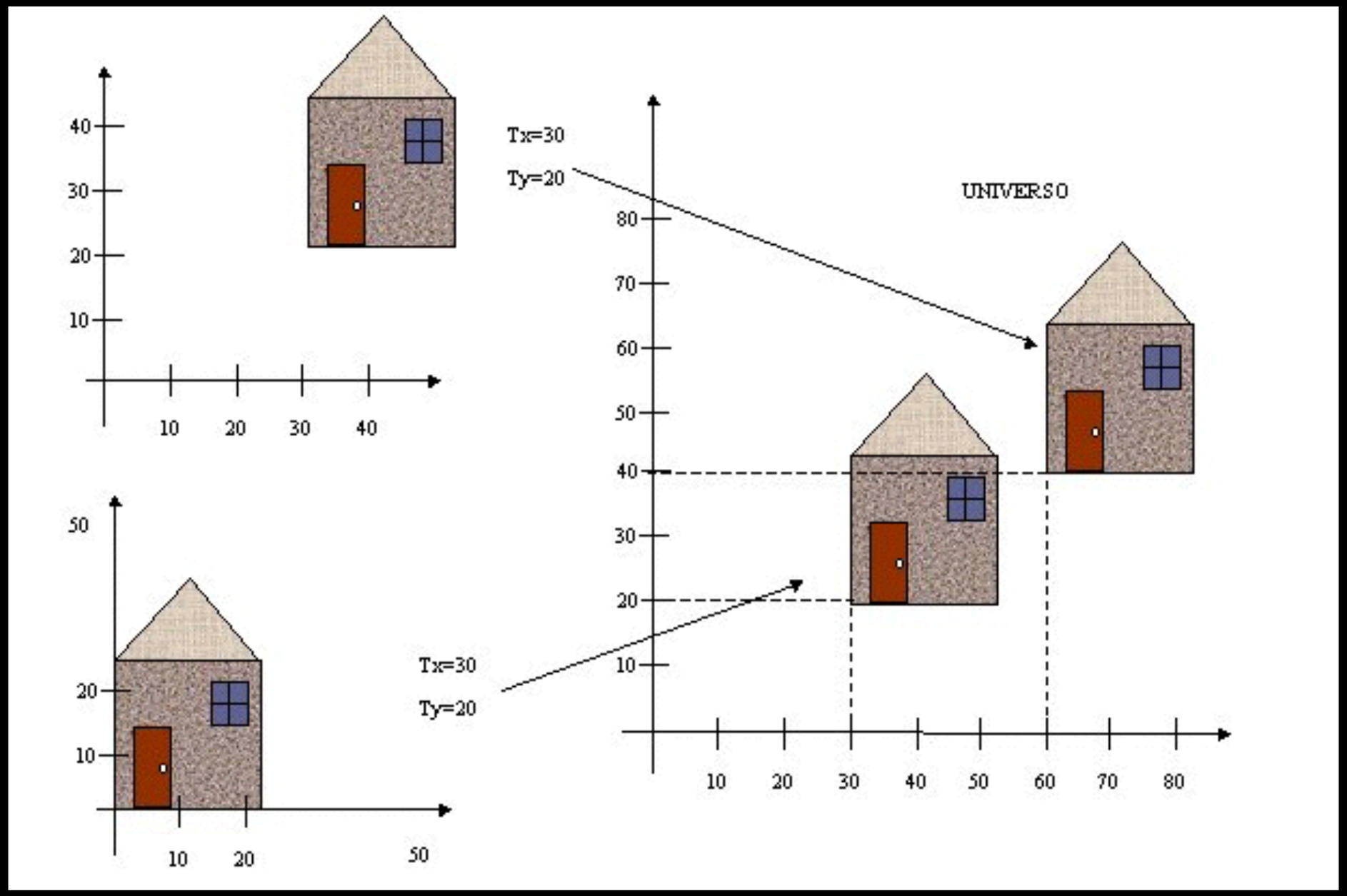
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Regra da mão direita e esquerda

Regra da mão direita e esquerda



Translação


40
30
20
10
10
20
30
40
Tx=30
Ty=20
UNIVERSO
80
70
60
50
40
30
20
10
10
20
30
40
50
60
70
80
50
20
10
10
20
50
Tx=30
Ty=20

Sistema de coordenadas homogêneo e a translação

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 50 \\ 0 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de coordenadas homogêneo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$$

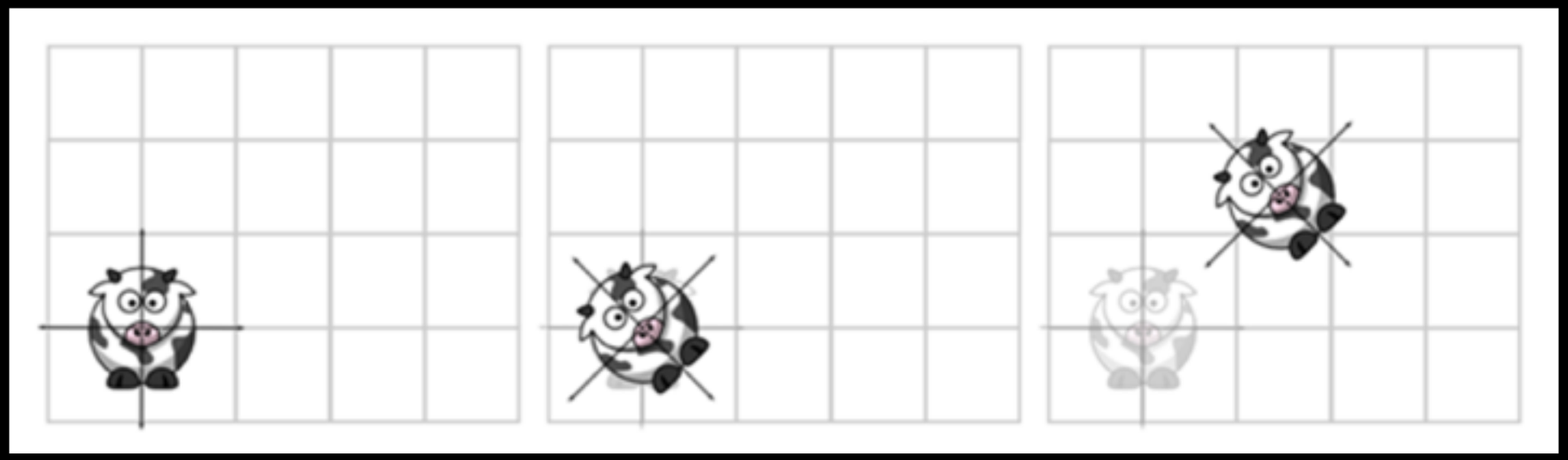
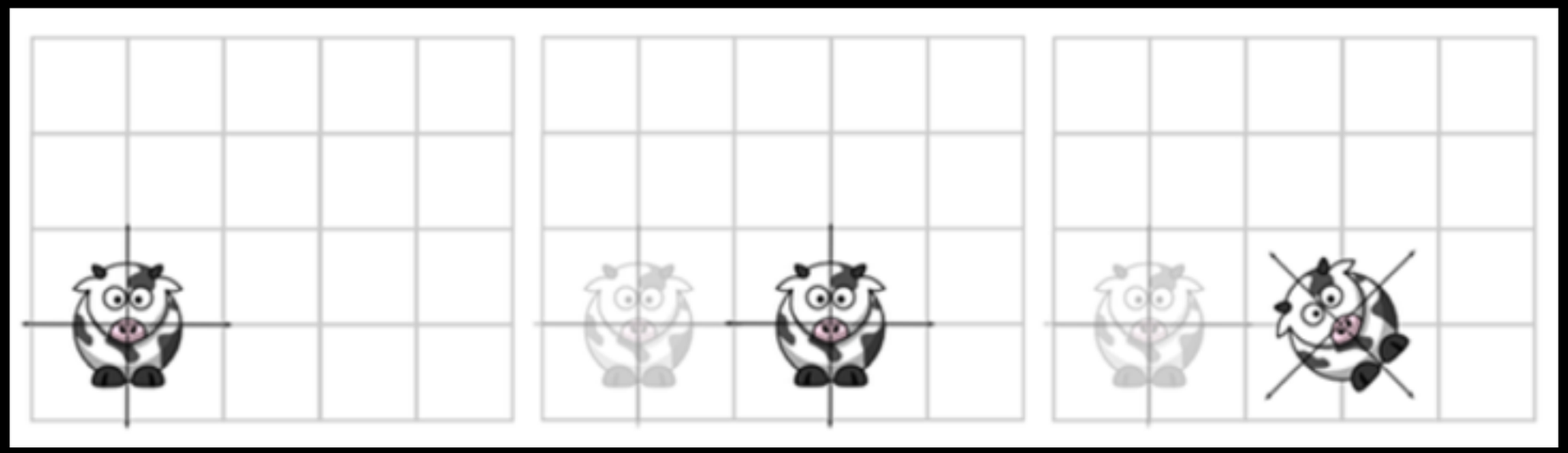
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 50 \\ 0 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

- Estudos dos espaços vetoriais e das relações entre esses espaços vetoriais:
  - Matriz – Matriz;
  - Matriz – Vetor;
  - Vetor – Vetor.

Agrupamento de transformações

- Multiplicando as matrizes de transformação, é possível agrupá-las em um sistema de coordenadas, facilitando a aplicação da transformação;
- Ao invés de:
  - $T \bullet X + R \bullet X + E \bullet X$
- Temos:
  - $T \bullet R \bullet E \bullet X$

Comutatividade das transformações